Capítulo 5

Transformada z

La *transformada z* es a los sistemas en tiempo discreto lo que la transformada de Laplace es a los sistemas en tiempo continuo. Ambas representan herramientas para el análisis de ciertas propiedades de las señales, que en el dominio del tiempo sólo pueden ser evaluadas con mayor dificultad: la convolución es transformada otra vez en un producto, y las ecuaciones de diferencias, que son el equivalente discreto de las ecuaciones diferenciales, pueden ser solucionadas de forma más sencilla en el dominio de la frecuencia compleja que en el dominio del tiempo discreto.

Antes de presentar la transformada z propiamente, es necesario introducir algunos conceptos básicos sobre señales discretas.

5.1 Funciones en tiempo discreto

En la actualidad muchas aplicaciones de la electrónica involucran el análisis digital de datos. Los reproductores de video y sonido utilizan desde hace varias décadas tecnologías digitales de almacenamiento y reproducción, como por ejemplo en discos compactos y discos versátiles digitales (CD y DVD); la próxima generación de televisión (HDTV) codifica las señales de audio y vídeo por métodos digitales; la telefonía celular es posible gracias a los complejos algoritmos de compresión implementados también con técnicas de procesamiento digital. El aumento continuo del uso de computadoras digitales en prácticamente todos los ámbitos del quehacer humano ha sido en parte soportado por la gran variedad de "tipos de datos" que pueden ser manipulados por medios digitales.

Ya en el capítulo 1 se definió una señal digital como aquella existente únicamente en ciertos instantes en el tiempo, y que además solo puede adquir valores dentro de un conjunto finito de valores. Puesto que el ser humano se desenvuelve en un ambiente eminentemente analógico, debe plantearse entonces la pregunta ¿qué tan factible o tan exacto es utilizar representaciones digitales para fenómenos eminentemente analógicos? El lector podrá inferir de los ejemplos mencionados, que su uso práctico es factible y ventajoso, considerando por ejemplo el incremento notable en la calidad de vídeos y bandas sonoras de uso doméstico.

5.1.1 Conversión analógica/digital

Conceptualmente en la conversión de una señal analógica a una representación digital intervienen tres pasos (figura 5.1):

1. *Muestreo* es la conversión de una señal de variable continua a otra de variable discreta que es el resultado de tomar “muestras” de la señal de variable continua en ciertos instantes. Si $x_a(t)$ es la entrada al bloque de muestreo, entonces la salida puede ser tomada en instantes equidistantes $x_a(nT)$, donde a T se le denomina el *intervalo de muestreo*.

2. *Cuantificación* es la conversión de la señal de variable discreta y valores continuos a otra señal de variable discreta pero con valores discretos. El valor de cada muestra es aproximado entonces con un valor de un conjunto finito de posibles valores. A la diferencia entre el valor continuo y su aproximación se le denomina *error de cuantificación*.

3. *Codificación* consiste en la asignación de una representación usualmente binaria para los valores cuantificados.

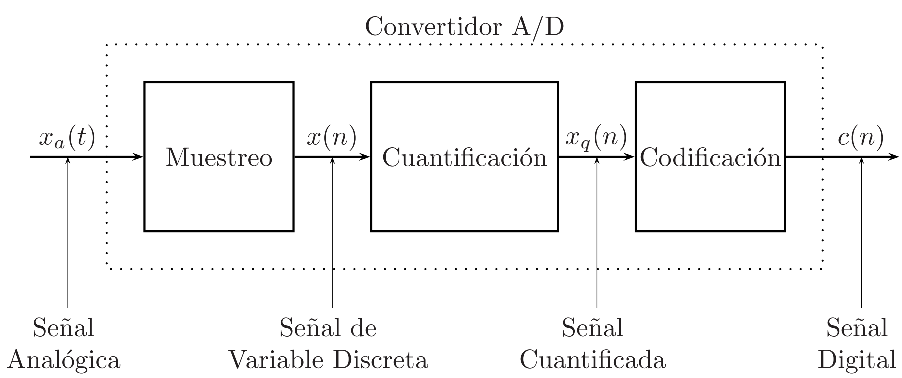


Figura 5.1: Pasos básicos en la conversión analógica/digital.

Estos pasos en la práctica se realizan en un solo bloque operacional. Desde un punto de vista de análisis matemático, usualmente se ignora el efecto del segundo paso, asumiendo que el número de valores posible es suficientemente elevado, de tal modo que el efecto de la cuantificación solo introduce un leve nivel de ruido, que puede ser manejado con otras herramientas estadísticas. El último paso es solo de relevancia para los algoritmos de procesamiento propiamente dichos. En otras palabras, el análisis matemático de señales digitales se simplifica en la práctica realizando solamente un análisis de señales en tiempo discreto, para el cual solo el primer paso de la digitalización es relevante.

Existen muchas posibilidades de seleccionar las muestras de una señal en tiempo discreto a partir de una señal analógica. Aquí se utilizará el llamado *muestreo periódico* o *uniforme*

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

por las facilidades que este brinda al análisis matemático. En él, la relación entre la señal analógica $x_a(t)$ y la señal de variable discreta $x(n)$ está dada por

$$x(n) = x_a(nT) \qquad n \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$$

donde la secuencia $x(n)$ contiene entonces muestras de la señal analógica $x_a(t)$ separadas por un intervalo T (figura 5.2).

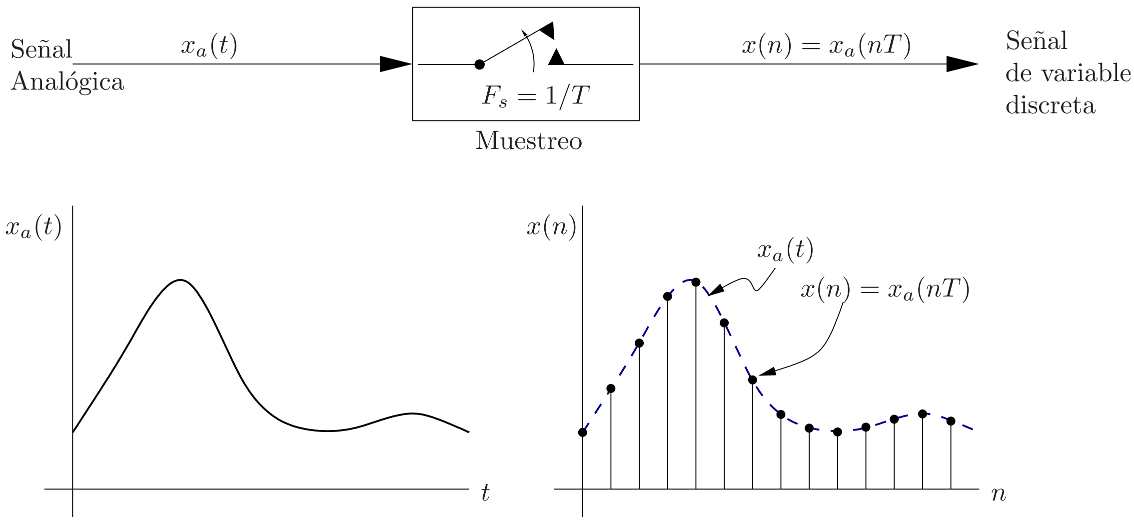


Figura 5.2: Muestreo periódico de una señal analógica.

Las variables t y n de las señales de variable continua y discreta respectivamente están relacionadas a través del intervalo de muestreo T

$$t = nT = n/F_s$$

donde a F_s se le denomina tasa de muestreo.

Otros tipos de muestreo más complejos utilizan tasas variables, que se ajustan de acuerdo a la velocidad de cambio de las señales. Estos son utilizados por ejemplo en algoritmos de compresión de señales.

5.1.2 Representaciones de funciones de variable discreta

Se ha visto que $x(n)$ es una función definida para n entero. La figura 5.3 presenta un ejemplo de representación gráfica de una señal de este tipo.

Se debe insistir en que $x(n)$ está definida únicamente para valores enteros n. No se debe cometer el error de asignar cero o cualquier otro valor a $x(t)$ para números t reales no enteros ($t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), puesto que la señal $x(n)$ (que es diferente a $x_a(t)$) está definida exclusivamente para valores enteros. A n se le denomina número de muestra y a $x(n)$ la n-ésima muestra de la señal.

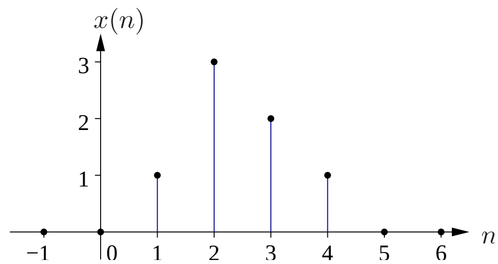


Figura 5.3: Representación gráfica de una función de variable discreta $x(n)$.

En capítulos previos ya se trabajó con una función de variable discreta: el espectro de una señal periódica obtenido por medio de los coeficientes c_k de la serie de Fourier, que fueron interpretados en su ocasión como una función de variable discreta $c(k)$.

Además de la representación gráfica para las señales discretas, hay otras tres representaciones usuales:

1. Funcional:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 5 - n & \text{para } 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases}$$

Esta es la representación más usual en el análisis matemático de funciones discretas.

2. Tabular

n	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$	...	0	0	1	3	2	1	0	...

En programas computacionales para manipulación y modelado digital de sistemas, como por ejemplo el MATLAB™[13] o el Octave [4], las funciones se representan usualmente de esta manera: por un lado con los números de muestra n, y por otro con los valores de las muestras $x(n)$.

3. Como secuencia.

Una secuencia de duración infinita con el origen en $n = 0$ (indicado con "↑") se representa como

$$x(n) = \{\ldots, 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

Si la secuencia es 0 para $n < 0$ se puede representar como

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

y si es finita

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1\} = \{0, 1, 3, 2, 1\}$$

donde la flecha "↑" se omite si la primera muestra en la secuencia corresponde a la muestra en 0.

Esta notación es muy útil para interpretación rápida de los efectos que tienen ciertas operaciones básicas (como desplazamiento, inversión, escalado, etc.) sobre señales de variable discreta.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Para el análisis matemático de señales y sistemas en tiempo discreto es útil representar la función muestreada $x_a(nT)$ por medio de impulsos de Dirac con áreas modificadas de acuerdo al valor de cada muestra. Así, defínase la función muestreada $\hat{x}_a(t)$ como

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \tag{5.1}$$

Nótese que esta representación ya fue utilizada para representar con la transformada de Fourier el espectro de una señal periódica, que es bien sabido tiene un espectro discreto determinado por los coeficientes c_k de la serie de Fourier. Esta última representación es fundamental para la obtención de la transformada z.

5.1.3 Señales elementales de variable discreta

Ciertas señales aparecen frecuentemente en el análisis de sistemas y señales discretas.

Impulso unitario

El impulso unitario $\delta(n)$ está definido como (figura 5.4a):

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

Escalón unitario

El escalón unitario $u(n)$ se define como (figura 5.4b):

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i)$$

Rampa unitaria

La rampa unitaria se obtiene de

$$u_r(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} u(i-1)$$

lo que resulta en (figura 5.4c)

$$u_r(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ n & \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

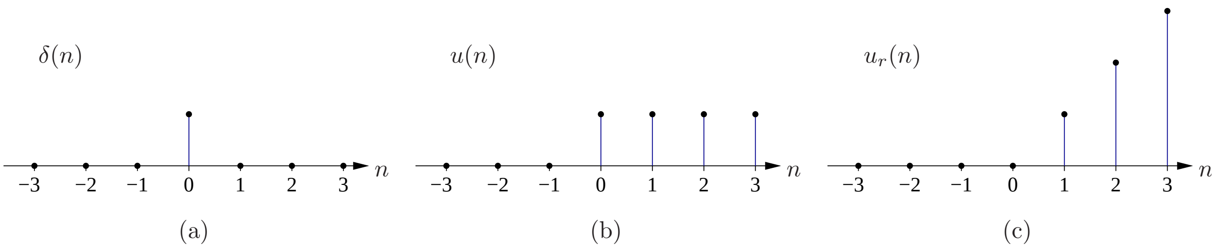


Figura 5.4: Tres funciones elementales (a) Impulso unitario. (b) Escalón unitario. (c) Rampa unitaria

Señal exponencial

La señal exponencial se define como

$$x(n) = a^n$$

y su comportamiento depende de la constante a. Para valores reales y complejos de a, el comportamiento es estable si $|a| < 1$ o inestable si $|a| > 1$ (figura 5.5).

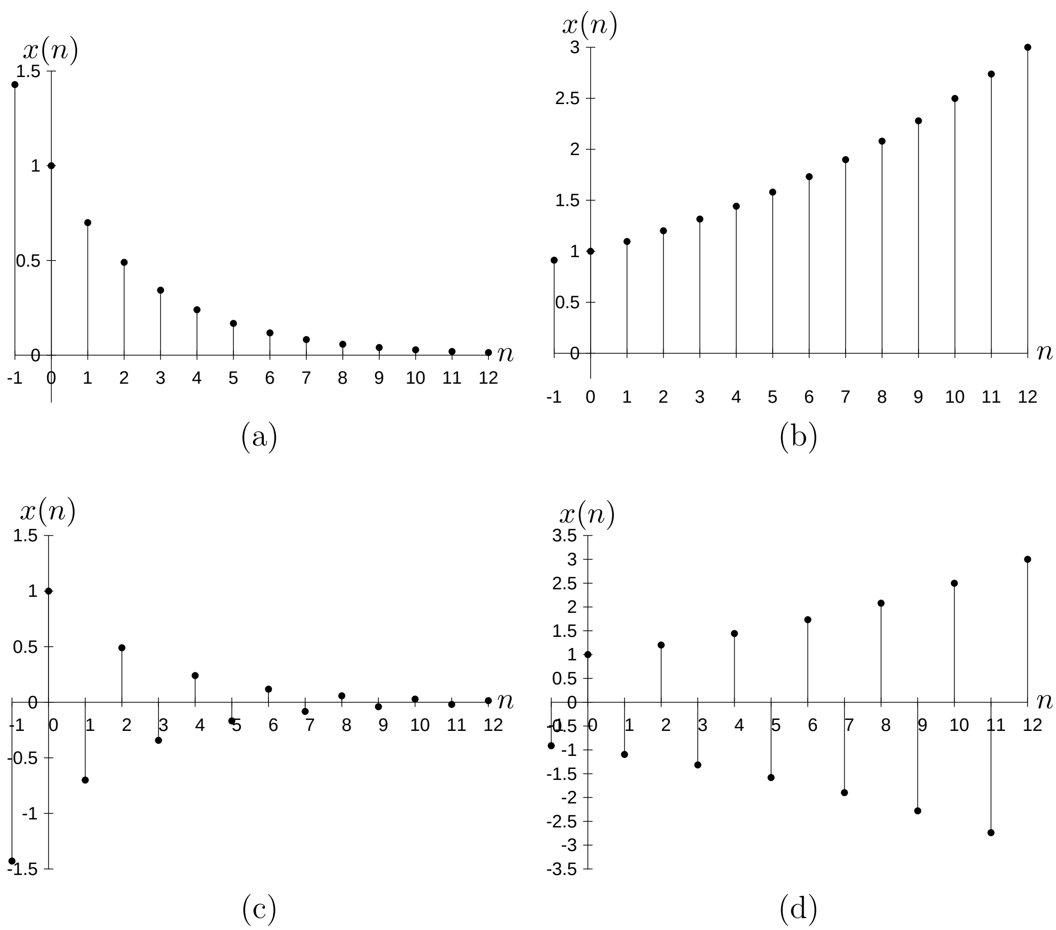
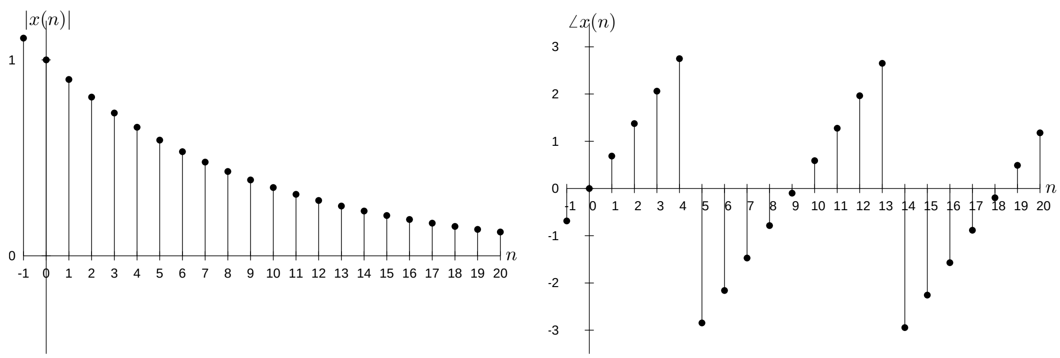


Figura 5.5: Funciones exponenciales para valores de a reales. (a) $0 < a < 1$ (b) $a > 1$ (c) $-1 < a < 0$ (d) $a < -1$.

Si a es complejo entonces puede expresarse como

$$a = re^{j\psi} \Rightarrow x(n) = r^n e^{j\psi n}$$

es decir, un fasor de magnitud r^n con fase ψn (figura 5.6).



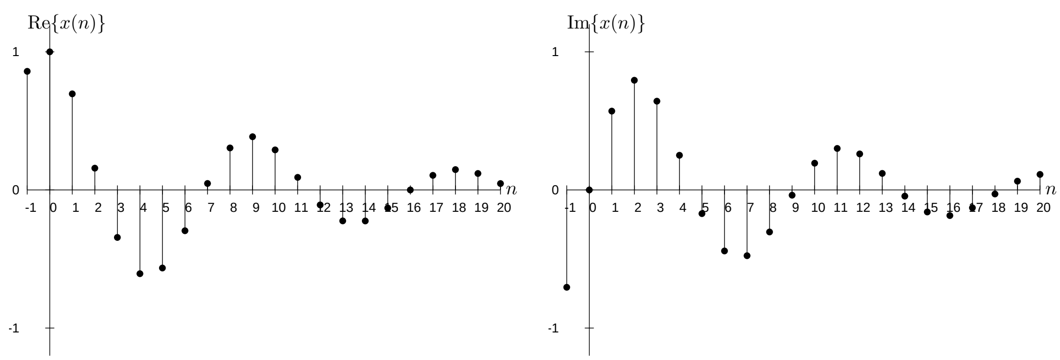
(a) (b)

Figura 5.6: Magnitud y fase de la función exponencial compleja con $a = re^{j\psi}$, $r < 1$ y $0 < \psi < \pi$. (a) Magnitud. (b) Fase

Utilizando la identidad de Euler se obtiene

$$x(n) = r^n \cos(\psi n) + jr^n \sin(\psi n)$$

cuyas partes real e imaginaria se muestran en la figura 5.7.



(a) (b)

Figura 5.7: Partes real e imaginaria de la función exponencial con a compleja. (a) Parte real. (b) Parte imaginaria

Nótese que si $r = 1$ la señal es amplitud constante.

Otra representación de una señal exponencial compleja se presenta en la figura 5.8, donde el valor de cada muestra se grafica sobre un plano complejo perpendicular al eje n, generándose así un patrón fasorial en el tiempo discreto, en el que se aprecian tanto las componentes real e imaginaria, como la magnitud y fase de cada muestra.

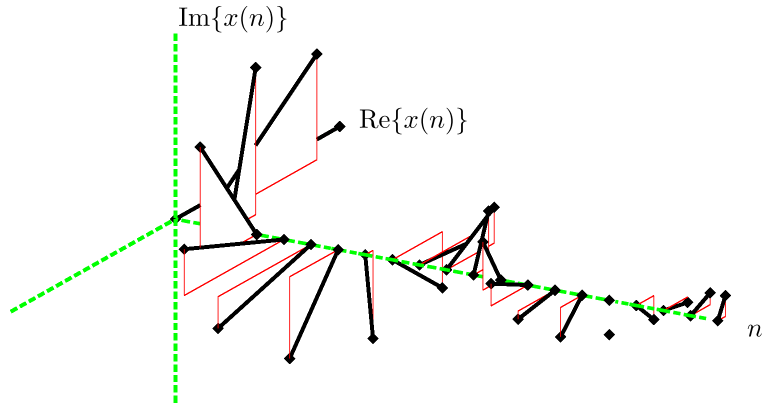


Figura 5.8: Representación de muestras complejas en planos complejos, situados en cada muestra n.

5.2 Transformada z bilateral

5.2.1 Transformada z bilateral directa

Tómese ahora la representación $\hat{x}_a(t)$ de una señal muestreada, tal como se definió en (5.1). Su transformada de Laplace es

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\hat{x}_a(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}\,dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}
\end{aligned}
$$

Si se define $z = e^{sT}$ y considerando que $x(n) = x_a(nT)$ se obtiene

$$
\mathscr{Z}\left\{x(n)\right\} \stackrel{!}{=} \mathscr{L}\left\{\hat{x}_a(t)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z)
$$

que es la definición de la transformada z *bilateral* para la secuencia discreta $x(n)$, que considera tanto valores positivos como negativos de n.

La relación entre la secuencia discreta $x(n)$ y su representación $X(z)$ en el dominio z se denota como:

$$
x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) \qquad \text{ó} \qquad x(n) \stackrel{z}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)
$$

Como la transformada z es una serie infinita de potencias, ésta existe solo para los valores de z en que la serie converge. La región de convergencia (ROC, *region of convergence*) de $X(z)$ es entonces el conjunto de valores de z para los que $X(z)$ es finita.

Nótese que la sustitución de variable $z = e^{sT}$ puede interpretarse como un mapeo conforme del plano $s = \sigma + j\omega$ al plano complejo z. En el ejemplo 2.11 ya se analizó que, debido a que

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

entonces una linea vertical en el plano s, para la cual σ es constante, es transformada en un círculo de radio $e^{\sigma T}$. Se deduce que una banda vertical entre $\sigma_{min} < \sigma < \sigma_{max}$ es transformada en un anillo delimitado por un círculo interno de radio $e^{\sigma_{min} T}$ y un círculo externo de radio $e^{\sigma_{max} T}$. Puesto que $X(z)$ corresponde a una transformada de Laplace cuya ROC es alguna banda vertical en el plano s, se concluye que las regiones de convergencia de la transformada z equivalen a anillos (de posible extensión infinita) en el plano z. Si la señal es derecha, entonces la ROC será según lo anterior el exterior de un círculo. Si la señal es izquierda, será el interior de un círculo.

Al igual que con la transformada bilateral de Laplace, cuando se haga referencia a la transformada z de una señal discreta $x(n)$ debe también incluirse su ROC.

Ejemplo 5.1 Calcule la transformada z de:

1. $x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
2. $x_2(n) = \{1, 2, 5, \underset{\uparrow}{7}, 0, 1\}$
3. $x_3(n) = \delta(n)$
4. $x_4(n) = \delta(n + k), k > 0$

Solución:

1. $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$, ROC $= z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$
2. $X_2(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 7 + z^{-2}$, ROC $= z \in \mathbb{C}\backslash\{0, \infty\}$
3. $X_3(z) = 1$, ROC $= z \in \mathbb{C}$
4. $X_4(z) = z^{+k}$, ROC $= z \in \mathbb{C}\backslash\{\infty\}$

La ROC de señales finitas es todo el plano z excepto $z = 0$ y/o $z = \infty$. $\boxed{5.1}$

Ejemplo 5.2 Determine la transformada z de:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n$$

que converge si $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$, a:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

$\boxed{5.2}$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Si se expresa z en su forma polar $z = re^{j\varphi}$, con $r = |z|$ y $\varphi = \angle z$, entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n}$$

Dentro de la ROC de $X(z)$, $|X(z)| < \infty$, por lo que:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right| \tag{5.2}$$

es decir, si $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable entonces $|X(z)|$ es finita.

Para encontrar la ROC se debe entonces encontrar el rango de valores de r para los que la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable.

Ahora bien, la ecuación (5.2) puede reescribirse como:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| x(n) r^{-n} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(-n) r^{n} \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

y ambas sumatorias deben converger si $|X(z)|$ ha de ser finito. Para la primera suma deben existir valores de r suficientemente pequeños para que $x(-n)r^n$ sea absolutamente sumable ($r < r_1$) (figura 5.9).

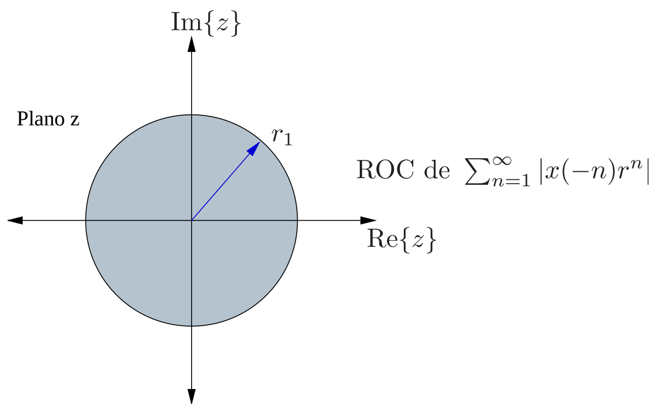


Figura 5.9: Representación gráfica de la ROC para r suficientemente pequeños.

Para que la segunda suma converja, se necesitan valores de r suficientemente grandes para que $x(n)r^{-n}$ sea absolutamente sumable. Por ello, la ROC serán los puntos fuera de una circunferencia $r > r_2$ (figura 5.10).

Como ambas sumas deben converger la ROC de $X(z)$ es la región anular del plano z, $r_2 < r < r_1$ (figura 5.11), lo que concuerda con el análisis anterior basado en el mapeo conforme $z = e^{sT}$.

Ejemplo 5.3 Determine la transformada z de:

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

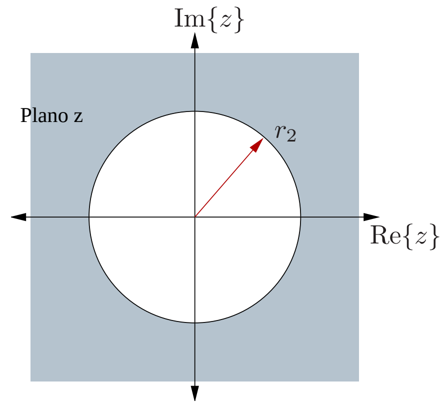


Figura 5.10: Representación gráfica de la ROC para r suficientemente grandes.

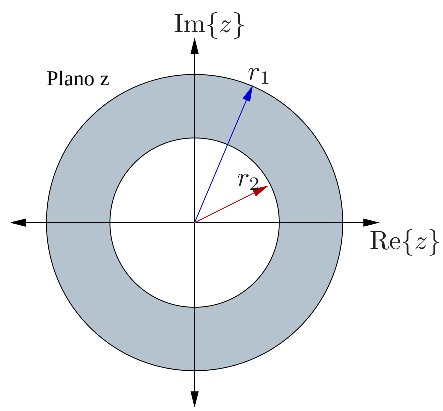


Figura 5.11: Representación gráfica completa de la ROC.

Solución: Se tiene que:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

que converge si $|\alpha z^{-1}| < 1$ ($|z| > |\alpha|$) a $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$.

Nótese que si $\alpha = 1$, se tiene la transformada z del escalón unitario:

$$x(n) = u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \text{ROC: } z > 1$$

5.3

Ejemplo 5.4 Determine la transformada z de:

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$$

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m = -\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^m$$

que converge sólo si $|\alpha^{-1}z| < 1$, es decir, si $|z| < |\alpha|$, a:

$$X(z) = -\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}z} - 1\right) = -\frac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Nótese que esta expresión es idéntica a la obtenida para $x(n) = \alpha^n u(n)$. Se concluye que la forma compacta de la transformada z no especifica una única señal en el dominio del tiempo. Esto sólo ocurre indicando además la ROC. El término *transformada z* indica entonces no sólo la expresión $X(z)$, sino también su ROC.

Lo anterior cumple con que la ROC de una señal anticausal es el interior de una circunferencia, mientras que para señales causales es el exterior de una circunferencia.

$\boxed{5.4}$

Ejemplo 5.5 Determine la transformada z de:

$$x(n) = \alpha^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha z^{-1}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b^{-1}z\right)^n$$

La primera suma converge si $|\alpha z^{-1}| < 1$ ($|z| > |\alpha|$) y la segunda si $|b^{-1}z| < 1$ ($|z| < |b|$). Esto implica que la transformada z existe si y sólo si $|b| > |\alpha|$ y la ROC es un anillo en el plano z. $\boxed{5.5}$

La figura 5.12 muestra un resumen de lo discutido hasta el momento en cuanto a la relación de la causalidad de una señal con respecto a la ROC de su transformada z. Nótese la relación con las ROC de la transformada de Laplace.

La tabla 5.1 resume algunas transformaciones importantes. Se aprecia que todas las transformaciones en esta tabla son funciones racionales.

5.2.2 Propiedades de la transformada z bilateral

Linealidad

Si $x_1(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(z)$ y $x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(z)$, entonces

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)\,.$$

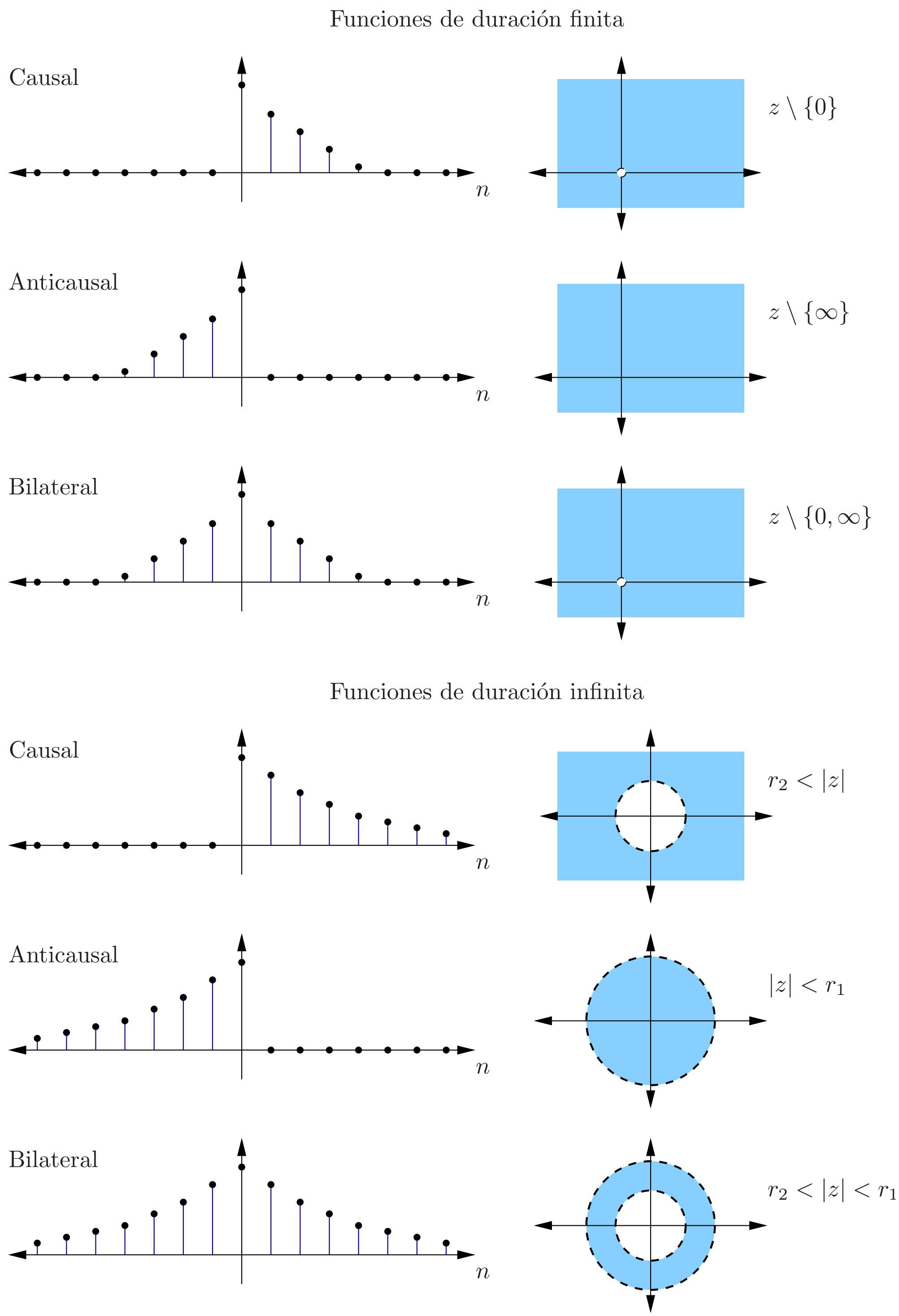


Figura 5.12: Familia de Señales y sus ROC[16].

Tabla 5.1: Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$

Ejemplo 5.6 Determine la transformada z de $x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$.

Solución: Si $x_1(n) = 2^n u(n)$ y $x_2(n) = 3^n u(n)$, entonces $x(n) = 3x_1(n) - 4x_2(n)$

En el ejemplo (5.3) se derivó:

$$\alpha^n u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

con lo que se obtiene:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$
$$X_2(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 3$$

y la transformada de $x(n)$ es:

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-3z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 3$$

Nótese que la ROC final debe ser al menos la intersección de las dos ROC individuales.

$\boxed{5.6}$

©2005-2008 — P. Alvarado   Uso exclusivo ITCR

Desplazamiento en el tiempo

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z)$, entonces $x(n-k) \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-k}X(z)$.

La ROC de $z^{-k}X(z)$ es la misma de $X(z)$ excepto $z=0$ si $k>0$ y $z=\infty$ si $k<0$.

Esto se demuestra fácilmente con un cambio de variable del índice de la suma:

$$\mathscr{Z}\left\{x(n-k)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)z^{-n}$$

y con $m = n-k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)} \\
&= z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} \\
&= z^{-k}X(z)
\end{aligned}$$

Ya que el coeficiente de z^{-n} es el valor de la muestra en el instante n, se aprecia que retrasar una señal en k muestras ($k>0$) es equivalente a multiplicar todos los términos de la transformada z por z^{-k}.

Escalado en el dominio z

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z)$, ROC: $r_1 < |z| < r_2$, entonces:

$$a^n x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(a^{-1}z), \quad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

para todo $a \in \mathbb{C}$.

Demostración:

$$\mathscr{Z}\left\{a^n x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

dado que la ROC de $X(z)$ es $r_1 < |z| < r_2$, entonces para $X(a^{-1}z)$ se cumple que $r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \Rightarrow |a|r_1 < |z| < |a|r_2$.

Con $a = r_0 e^{j\omega_0}$, $z = re^{j\omega}$ y $\zeta = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right)e^{j(\omega-\omega_0)}$, se observa con $\mathscr{Z}\left\{x(n)\right\} = X(z)$ y $\mathscr{Z}\left\{a^n x(n)\right\} = X(a^{-1}z) = X(\zeta)$, que si $r_0 > 1$ implica una expansión del plano z, o si $r_0 < 1$ una contracción del plano z, en combinacion con una rotación (si $\omega_0 \neq 2k\pi$). Nótese que $\zeta = a^{-1}z$ representa un mapeo lineal del plano z al plano ζ.

Ejemplo 5.7 Determine la transformada z de la señal $a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$

Solución:

Con la identidad de Euler se obtiene primero que:

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

y con $\mathscr{Z}\left\{\alpha^n u(n)\right\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ se obtiene con $\alpha = e^{\pm j\omega_0}$ y la linealidad de la transformación:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}\left\{\cos\omega_0 n u(n)\right\} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}+1-e^{j\omega_0}z^{-1}}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2-z^{-1}(e^{-j\omega_0}+e^{j\omega_0})}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}-e^{j\omega_0}z^{-1}+z^{-2}}\right\}, \quad (e^{-j\omega_0}+e^{j\omega_0}) = 2\cos\omega_0 \\
&= \frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}; \qquad \text{ROC: } |z| > |e^{j\omega_0}| = 1
\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathscr{Z}\left\{a^n\cos(\omega_0 n)u(n)\right\} = \frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}, \quad |z| > |a|$$

$\boxed{5.7}$

Conjugación

Si $x(n)$ tiene como transformada z a $X(z)$ con ROC R entonces

$$x^*(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X^*(z^*), \qquad \text{ROC: } R$$

Esto se demuestra utilizando las propiedades de conjugación:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}\left\{x^*(n)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x(n)(z^*)^{-n}\right)^* \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}\right)^* \\
&= X^*(z^*)
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que si $x(n)$ es real, entonces $X(z) = X^*(z^*)$, lo que implica que si $X(z)$ tiene un polo o cero en $z = z_0$, también lo tendrá en $z = {z_0}^*$. En otras palabras, los polos y ceros aparecen como pares complejos conjugados en la transformada z de secuencias reales $x(n)$. Obsérvese que la relación $X(z) = X^*(z^*)$ para funciones reales indica que si se hace un corte paralelo al eje $\text{Im}\{z\}$ de la superficie correspondiente a $|X(z)|$, entonces la función en ese corte presenta simetría par. Por otro lado, la fase tiene un comportamiento impar en los cortes paralelos al eje $\text{Im}\{z\}$.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Inversión temporal

$$\begin{aligned} x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z), &\quad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2 \\ x(-n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z^{-1}), &\quad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \end{aligned}$$

Demostración:

$$\mathscr{Z}\left\{x(-n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

La ROC de $X(z^{-1})$ sería $r_1 < |z^{-1}| < r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Ejemplo 5.8 Determine la transformada z de $u(-n)$.

Solución: Puesto que

$$\mathscr{Z}\left\{u(n)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}},\ \text{ROC: } |z| > 1$$

entonces

$$\mathscr{Z}\left\{u(-n)\right\} = \frac{1}{1-z},\ \text{ROC: } |z| < 1$$

$\boxed{5.8}$

Diferenciación en el dominio z

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z)$, entonces $nx(n) \circ\!\!-\!\!\bullet -z\frac{dX(z)}{dz}$.

Para demostrar esta propiedad se derivan ambos lados de la definición con respecto a z:

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} \\ &= -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx(n))z^{-n} = -z^{-1}\mathscr{Z}\left\{nx(n)\right\} \\ &\Rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = \mathscr{Z}\left\{nx(n)\right\} \end{aligned}$$

©2005-2008 — P. Alvarado   Uso exclusivo ITCR

Ejemplo 5.9 Determine la transformada z de $x(n) = na^n u(n)$

Solución: Con $x_1(n) = a^n u(n)$, entonces $x(n) = nx_1(n)$, y puesto que $X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC $|z| > |a|$, se obtiene:

$$na^n u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = -z\left[\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}\right] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Con $a = 1$ se obtiene la transformación de la rampa unidad:

$$nu(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

5.9

Convolución de dos secuencias

Si

$$x_1(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(z), \quad \text{ROC: } R_1$$
$$x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(z), \quad \text{ROC: } R_2$$

entonces:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

la ROC es al menos $R_1 \cap R_2$.

Demostración:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n)$$

la transformada z de $x(n)$ es:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right)z^{-n}$$

Intercambiando las sumatorias y aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo se obtiene que:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}\right] \\ &= X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z) \end{aligned}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Teorema del valor inicial

Si $x(n)$ es causal ($x(n) = 0, \forall n < 0$), entonces:

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Puesto que $x(n)$ es causal:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + \dots$$

Si $z \to \infty$ todos los términos z^{-1}, z^{-2}, etc. tienden a cero y por tanto:

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Todas las propiedades descritas anteriormente se resumen en la tabla 5.2.

5.2.3 Transformada z inversa

Definición

El procedimiento de encontrar la señal en el dominio del tiempo correspondiente a la expresión algebraica en el dominio z para una determinada región de convergencia se denomina *transformada z inversa*. Utilizando el teorema integral de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy se demuestra que se cumple

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k}\, dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \tag{5.3}$$

para un contorno de integración C que rodea al origen.

A partir de la definición de la transformada z para una señal de variable discreta $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

se obtiene multiplicando ambos lados por z^{n-1}, e integrando en un contorno cerrado que contiene al origen, y que está dentro de la ROC:

$$\oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k+n-1}\, dz$$

Como la serie converge dentro de C, la integral y la sumatoria pueden ser intercambiadas:

$$\oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{-k+n-1}\, dz$$

que con el resultado en (5.3) sólo es diferente de cero para $k = n$, es decir:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz \tag{5.4}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Tabla 5.2: Propiedades de la transformada z bilateral.

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$	$X(z)$	$R = \{z \mid r_2 < \lvert z\rvert < r_1\}$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
Reflexión en n	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R
Derivación en z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	

Ejemplo 5.10 Encuentre la transformada z inversa de la expresión

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

si se sabe que la señal correspondiente es causal.

Solución: Aplicando (5.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} z^{n-1}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{z - \alpha} z^{n-1}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - \alpha}\, dz
\end{aligned}$$

Como C debe estar dentro de la ROC, y la señal es causal, entonces se escoje una circunferencia de radio mayor que $|\alpha|$. Para $n > 0$ se tiene un cero de orden n en $z = 0$, o ningún cero cuando $n = 0$, y en ambos casos hay un polo en $z = \alpha$. En estos casos se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener directamente

$$x(n) = z^n\big|_{z=\alpha} = \alpha^n$$

Para $n < 0$ la función $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = 0$, que también está dentro de C, por lo que dos polos $z_1 = 0$ y $z_2 = a$ contribuyen al valor de la integral.

Con $n = -1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z(z-a)}\, dz &= \left.\frac{1}{z - a}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z}\right|_{z=a} \\
&= -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0
\end{aligned}$$

Con $n = -2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)}\, dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-\frac{1}{a}}{z^2} + \frac{-\frac{1}{a^2}}{z} + \frac{\frac{1}{a^2}}{z - a}\, dz \\
&= 0 - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = 0
\end{aligned}$$

Esto se puede repetir para todo $n < -2$ resultando en $x(n) = 0$. Por tanto, resumiendo ambos casos en una ecuación se obtiene:

$$x(n) = a^n u(n)$$

5.10

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

La transformada z inversa mediante expansión en serie de potencias

La idea de este método es expandir $X(z)$ en una serie de potencias de la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

que converge en la región de convergencia asociada a $X(z)$. Este método ya se introdujo en la sección 2.4.1 sobre series de potencias, donde se observa que ahora se utiliza el caso particular de series de Laurent centradas en $z = 0$.

Ejemplo 5.11 Calcule la secuencia en tiempo discreto $x(n)$ si su transformada z tiene como expresión algebraica

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

para las regiones de convergencia

1. ROC: $|z| > 1$
2. ROC: $|z| < 1/2$

Solución: Debido a que la ROC $|z| > 1$ es el exterior de un círculo y $X(z)$ es racional, entonces $x(n)$ es una señal causal. Para calcularla se ordenan el numerador y el denominador del mayor coeficiente al menor y se divide:

$$
\begin{array}{l|l}
1+\frac{1}{2}z^{-1} & 1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2} \\ \cline{2-2}
-(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}) & 1+2z^{-1}+\frac{5}{2}z^{-2}+\frac{11}{4}z^{-3}+\frac{23}{8}z^{-4}+\ldots \\ \hline
\quad 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & \\
\quad -(2z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}) & \\ \hline
\qquad \frac{5}{2}z^{-2} - z^{-3} & \\
\qquad -(\frac{5}{2}z^{-2} - \frac{15}{4}z^{-3} + \frac{5}{4}z^{-4}) & \\ \hline
\qquad\quad \frac{11}{4}z^{-3} - \frac{5}{4}z^{-4} & \\
\qquad\quad -(\frac{11}{4}z^{-3} - \frac{33}{8}z^{-4} + \frac{11}{8}z^{-5}) & \\ \hline
\qquad\qquad \frac{23}{8}z^{-4} - \frac{11}{8}z^{-5} &
\end{array}
$$

Con lo que se deduce $x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}, \ldots \right\}$.

La ROC $|z| < 1/2$ corresponde a una señal anticausal. Para este caso se ordenan el numerador y el denominador de menor a mayor y se divide:

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2}
-(\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{2} + z) & z + 5z^2 + 13z^3 + 29z^4 + 61z^5 + \ldots \\ \hline
\quad \frac{5}{2} - z & \\
\quad -(\frac{5}{2} - \frac{15}{2}z + 5z^2) & \\ \hline
\qquad \frac{13}{2}z - 5z^2 & \\
\qquad -(\frac{13}{2}z - \frac{39}{2}z^2 + 13z^3) & \\ \hline
\qquad\quad \frac{29}{2}z^2 - 13z^3 & \\
\qquad\quad -(\frac{29}{2}z^2 - \frac{87}{2}z^3 + 29z^4) & \\ \hline
\qquad\qquad \frac{61}{2}z^3 - 29z^4 &
\end{array}
$$

y finalmente $x(n) = \{\ldots, 61, 29, 13, 5, 1, \underset{\uparrow}{0}\}$ $\boxed{5.11}$

Este método no provee la forma cerrada de $x(n)$ y resulta tedioso si se desea determinar $x(n)$ para n grande. Es además inestable numéricamente si se automatiza para ser calculado en computador.

Ejemplo 5.12 Determine la transformada z inversa de:

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad \text{ROC: } |z| > |a| \,.$$

Solución:

Puesto que la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$, $|x| < 1$ es

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

entonces

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}\,,$$

de donde se obtiene directamente $x(n) = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u(n-1)$ $\boxed{5.12}$

La transformada z inversa mediante expansión en fracciones parciales

Este método es análogo al ya revisado para la transformada inversa de Laplace en la sección 4.1.3. En él se expresa $X(z)$ como una combinación lineal:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \ldots + \alpha_k X_k(z)$$

donde $\{X_i(z)\}$ son las transformaciones de las señales $\{x_i(n)\}$ disponibles en tablas. Por linealidad se tendrá que:

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \ldots + \alpha_k x_k(n)$$

Si $X(z)$ es una función racional, entonces:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Nótese que si $a_0 \neq 1$, lo anterior se puede obtener dividiendo numerador y denominador por a_0.

Como se indicó en el capítulo anterior, esta función se denomina *propia* si $a_N \neq 0$ y $M < N$, es decir, si el número de ceros finitos es menor que el número de polos finitos. Una *función impropia* ($M \geq N$) siempre se puede representar como la suma de un polinomio y una función racional propia.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Ejemplo 5.13 Exprese la función impropia:

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

en términos de un polinomio y una función propia.

Solución:

Para hacer esto, se debe hacer la división de tal forma que los términos z^{-2} y z^{-3} sean eliminados, y para esto deben ordenarse los divisores de la misma manera que para determinar la expansión en serie de potencias de señales anticausales.

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1 & \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2}
-(\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{5}{3}z^{-2} + 2z^{-1}) & 2z^{-1} + 1 \\ \cline{1-1}
\frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1} + 1 & \\
-(\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1) & \\ \cline{1-1}
\frac{1}{6}z^{-1} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

5.13

En general, cualquier función racional impropia ($M \geq N$) se puede expresar como:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$$

Como la transformada z inversa de un polinomio en términos de z^{-1} se puede calcular fácilmente al corresponder éste directamente con las primeras muestras causales de la señal, se prestará ahora especial atención a la transformada de funciones racionales propias. Sea $X(z)$ una función racional propia:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

con $a_N \neq 0$ y $M < N$. Multiplicando por z^N tanto el numerador como denominador:

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

puesto que $N > M$ entonces

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

que es siempre propia. Para descomponer esta función como una suma de fracciones simples, se factoriza el denominador en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(z)$.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

1. Caso: Polos diferentes de primer orden.

   Si todos los polos son diferentes y de primer orden, entonces se busca la expansión:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{A_N}{z-p_N}$$

   donde

$$A_k = (z-p_k)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p_k}$$

Ejemplo 5.14 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la componente propia en el ejemplo 5.13, y con ella la transformada inversa $x(n)$ de la función $X(z)$ en dicho ejemplo, si se sabe que ésta es causal.

Solución: Multiplicando por $\frac{z^2}{z^2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2} &= \frac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{1}{6}z}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A_1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)} + \frac{A_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Nótese que no fue aquí necesario dividir por z pues la función racional resultante fue propia desde un principio. Multiplicando ambos lados por $(z+1/3)$ y haciendo $z \to -1/3$ se obtiene $A_1 = -1/3$. Por otro lado, multiplicando ambos lados por $(z+1/2)$ y haciendo $z \to -1/2$ se obtiene $A_2 = 1/2$.

Se cumple entonces:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\left(z+\frac{1}{3}\right)} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1) = \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n-1)$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo.

Falta únicamente transformar los términos $1+2z^{-1}$ que corresponden en el tiempo discreto a $\delta(n)+2\delta(n-1)$. De este modo se cumple

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n-1)$$

$\boxed{5.14}$

Ejemplo 5.15 Determine la expansión en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

.

Solución: Multiplicando por $\frac{z^2}{z^2}$ se obtiene:

$$X(z) = \frac{z^2+z}{z^2-z+\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2-z+\frac{1}{2}}$$

con los polos $p_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\pm j45^\circ}$ se puede realizar la siguiente descomposición:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} \Rightarrow X(z) = \frac{A_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}$$

$$A_1 = (z-p_1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_1} = \frac{z+1}{z-p_2}\bigg|_{z=p_1} = \frac{p_1+1}{p_1-p_2} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j71{,}6^\circ}$$
$$A_2 = (z-p_2)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_2} = \frac{z+1}{z-p_1}\bigg|_{z=p_2} = \frac{p_2+1}{p_2-p_1} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{j71{,}6^\circ}$$

Recuérdese que para el caso en que los coeficientes de los polinomios en el numerador y denominador son reales, entonces si $p_1 = {p_2}^*$ se cumple $A_1 = {A_2}^*$.

Asumiendo que se trata de una señal causal, se obtiene de la tabla 5.1

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = x(n) &= \left[A_1p_1^n + {A_1}^*{p_1}^{*n}\right]u(n) \\
&= |A_1||p_1|^n\left[e^{j(\angle A_1+n\angle p_1)} + e^{-j(\angle A_1+n\angle p_1)}\right]u(n) \\
&= 2|A_1||p_1|^n\cos\left(\angle A_1+n\angle p_1\right) \\
&= \sqrt{\frac{10}{2^n}}\cos\left(n45^\circ - 71{,}6^\circ\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{5.15}$

2. Caso: polos de orden múltiple.

   Si hay un polo de orden l, $(z-p_k)^l$, entonces la expansión en fracciones parciales tendrá términos:

$$\frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \ldots + \frac{A_{lk}}{(z-p_k)^l}$$

   donde los coeficientes $\{A_{ik}\}$ pueden obtenerse por medio de derivaciones sucesivas

Ejemplo 5.16 Determine la expansión en fracciones parciales de:

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

y encuentre la señal causal equivalente $x(n)$.

Solución: Multiplicando numerador y denominador por z^3 resulta en:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_2}{(z-1)} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

A_1 y A_3 se encuentran fácilmente multiplicando por los denominadores parciales y haciendo $z = p_i$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (z+1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4} \\ A_3 &= (z-1)^2\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{z^2}{(1+z)}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para calcular A_2 se procede:

$$(z-1)^2\frac{X(z)}{z} = A_1\frac{(z-1)^2}{z+1} + A_2(z-1) + A_3$$

y se deriva con respecto a z:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-1)^2 X(z)}{z}\right\}\bigg|_{z=1} &= A_1\frac{d}{dz}\frac{(z-1)^2}{z+1} + A_2\frac{d}{dz}(z-1) \\ &= A_1\left[\frac{2(z-1)(z+1)+(z-1)^2}{(z+1)^2}\right]_{z=1} + A_2 \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z+1}\right)\bigg|_{z=1} &= \frac{2z(z+1)-z^2}{(z+1)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{3}{4} = A_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple

$$X(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right] + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

y bajo la suposición de que la señal correspondiente es causal, se obtiene con las propiedades de linealidad y la tabla 5.1:

$$x(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right]u(n)$$

$\boxed{5.16}$

Para obtener la inversión de $X(z)$ se utiliza entonces la linealidad junto con el hecho ya demostrado de que:

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n), & \text{si ROC: } |z| > |p_k| \text{ (señales causales)} \\ -(p_k)^n u(-n-1), & \text{si ROC: } |z| < |p_k| \text{ (señales anticausales)} \end{cases}$$

Nótese que si la señal es causal, la ROC es $|z| > p_{max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \ldots, |p_N|\}$ y $x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \ldots + A_N p_N^n)u(n)$.

Si hay un par de polos complejos conjugados, ya se mencionó que los coeficientes también serán complejos conjugados siempre y cuando los coeficientes de los polinomios en el numerador y denominador sean reales, y por tanto:

$$x_k(n) = [A_k p_k^n + A_k{}^* p_k{}^{*n}]u(n) \tag{5.5}$$

Expresando en forma polar: $A_k = |A_k|e^{j\alpha_k}$, $p_k = |p_k|e^{j\beta_k}$ y sustituyendo en (5.5), entonces:

$$\begin{aligned} x_k(n) &= |A_k||p_k|^n[e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}]u(n) \\ &= 2|A_k||p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k)u(n), \quad \text{ROC: } |z| > |p_k| = r_k \end{aligned}$$

Nótese entonces que un par de polos complejos conjugados dan origen a una señal sinusoidal con envolvente exponencial, donde la distancia del polo al origen determina la atenuación exponencial, y el ángulo de los polos respecto al eje real determina la frecuencia de la oscilación.

Los ceros afectan la amplitud y fase a través de su influencia en los coeficientes A_k.

Para el caso de polos múltiples se utilizan tablas, pero es usual encontrar

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}\right\} = np^n u(n), \quad \text{ROC: } |z| > |p|$$

5.3 Sistemas en tiempo discreto

A los dispositivos que operan sobre señales de variable discreta (o tiempo discreto) se les denomina *sistemas discretos*. En general, reciben una señal de entrada $x(n)$ para producir una señal de salida $y(n)$. Se dice que el sistema transforma $x(n)$ en $y(n)$, lo que se expresa como

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

donde $\mathcal{T}[\cdot]$ representa al operador de transformación o procesamiento realizado por el sistema sobre $x(n)$ para producir $y(n)$.

5.3.1 Descripción entrada-salida de sistemas

La descripción de entrada-salida define la relación entre $x(n)$ y $y(n)$. La estructura interna del sistema es desconocida o ignorada, es decir, el sistema se interpreta como una *caja negra* (figura 5.13).

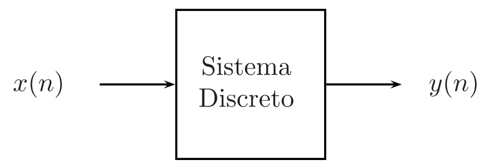


Figura 5.13: Entrada-salida de un sistema discreto

Ejemplo 5.17 Determine la salida de los siguientes sistemas para la entrada

$$x(n) = \begin{cases} 3 - |n| & \text{para } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1. $y(n) = x(n)$
2. $y(n) = x(n-2)$
3. $y(n) = x(n+1)$
4. $y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+1) + x(n) + x(n-1)\right]$
5. $y(n) = \max\left\{x(n+1), x(n), x(n-1)\right\}$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

Solución:

1. Al sistema $y(n) = x(n)$ se le denomina *identidad*, pues su salida es idéntica a la entrada: $y(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$
2. El sistema $y(n) = x(n-2)$ retarda la entrada dos unidades: $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2, 1\}$.
3. El sistema $y(n) = x(n+1)$ adelanta la señal una unidad y solo puede ser realizado fuera de línea, por ser imposible en un sistema de tiempo real determinar el valor de la señal una muestra en el futuro: $y(n) = \{1, 2, 3, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$.
4. El filtro paso bajos $y(n) = \frac{1}{3}\left[x(n+1) + x(n) + x(n-1)\right]$ calcula el promedio de tres muestras: $y(n) = \{1/3, 1, 2, \underset{\uparrow}{7/3}, 2, 1, 1/3\}$.
5. El filtro de rango $y(n) = \max\left\{x(n+1), x(n), x(n-1)\right\}$ entrega el valor máximo de la muestra actual, la anterior y la futura: $y(n) = \{1, 2, 3, \underset{\uparrow}{3}, 3, 2, 1\}$. Este filtro puede considerarse también como filtro paso bajos.
6. El acumulador $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ realiza la "integración discreta" de la entrada: $y(n) = \{1, 3, \underset{\uparrow}{6}, 8, 9, 9, \ldots\}$. Nóte que el acumulador puede reescribirse como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)}_{y(n-1)} + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

$\boxed{5.17}$

En general la salida $y(n)$ en el instante n no solo depende de la entrada $x(n)$ sino de muestras anteriores y posteriores a n. Además, la salida de un sistema puede depender de un estado interno. Por ejemplo, en el acumulador $y(n) = y(n-1) + x(n)$ si una secuencia de entrada se aplica en dos instantes de tiempo distintos las dos reacciones del sistema difieren, dependiendo de la historia anterior del sistema "$y(n-1)$". Para determinar entonces la salida en un instante n_0 es necesario conocer $y(n_0-1)$. El cálculo de la secuencia de salida $y(n)$ para todo instante $n > n_0$ tiene como *condición inicial* al valor $y(n_0-1)$, que en cierta forma resume todo el pasado del sistema.

Si la condición inicial es cero, se dice que el sistema esta en *reposo*. Siempre se asume que en $n=-\infty$ todo sistema está en reposo. La salida de un sistema en reposo puede expresarse entonces utilizando únicamente la señal de entrada.

Ejemplo 5.18 Determine la salida del sistema acumulador para la entrada $x(n) = nu(n)$ con condición inicial $y(-1) = \alpha$.

Solución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)}_{y(-1)=\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha + \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde se ha utilizado

$$\begin{array}{rcccccccc}
\sum_{k=0}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\
\sum_{k=0}^{n} k & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2\sum_{k=0}^{n} k & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 \\
2\sum_{k=0}^{n} k & = & n(n+1) & & & & & & \\
\sum_{k=0}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2} & & & & & &
\end{array}$$

5.18

5.3.2 Tipos de sistemas en tiempo discreto

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema en reposo $\mathcal{T}$ es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si y solo si

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \quad \Rightarrow \quad x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n-k)$$

Ejemplo 5.19 Determine si los siguientes sistemas son invariantes en el tiempo.

1. $y(n) = x(n) - x(n-1)$
2. $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$

Solución: Para demostrar la invarianza en el tiempo se calcula la respuesta del sistema a la entrada $x(n-k)$, que resulta en $y_k(n) = x(n-k) - x(n-k-1)$. La respuesta a

$x(n)$, retrasada k muestras es $y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1)$. Como $y(n-k) = y_k(n)$ el sistema es invariante en el tiempo.

Para el segundo sistema, su respuesta $y_k(n)$ a $x(n-k)$ es $y_k(n) = x(n-k)\cos(\omega_0 n)$, y la repuesta a $x(n)$, retrasada k muestras es $y(n-k) = x(n-k)\cos(\omega_0(n-k))$ que es diferente a $y_k(n)$. Por lo tanto el sistema modulador $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$ es variante en el tiempo, $\boxed{\text{5.19}}$

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir, para las constantes a_1, a_2 y para las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se cumple

$$\mathcal{T}\left[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\right] = a_1\mathcal{T}\left[x_1(n)\right] + a_2\mathcal{T}\left[x_2(n)\right] \; .$$

Como consecuencia, todo sistema lineal tiene la propiedad multiplicativa o de escalado

$$\mathcal{T}\left[a_1x_1(n)\right] = a_1\mathcal{T}\left[x_1(n)\right]$$

y la propiedad aditiva

$$\mathcal{T}\left[x_1(n) + x_2(n)\right] = \mathcal{T}\left[x_1(n)\right] + \mathcal{T}\left[x_2(n)\right].$$

El principio de superposición con M entradas puede generalizarse como

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k\mathcal{T}\left[x_k(n)\right]$$

De la propiedad de escalado se deduce además que en un sistema lineal en reposo con entrada cero ($a_1 \neq 0$), entonces la salida debe ser cero.

Si para un sistema la propiedad de superposición no se cumple, entonces el sistema se dice ser no lineal.

Ejemplo 5.20 Compruebe si los siguientes sistemas son lineales.

1. $y(n) = nx(n)$
2. $y(n) = x(n^2)$
3. $y(n) = x^2(n)$
4. $y(n) = Ax(n) + B$
5. $y(n) = e^{x(n)}$

Solución:

1. Para el sistema 1 se obtiene primero la respuesta del sistema a una entrada igual a la suma ponderada de dos señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$, es decir, para una entrada *total* $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ y se obtiene $y_T(n) = n(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$. Ahora, la suma ponderada de la salida del sistema para $x_1(n)$ y $x_2(n)$ por *separado* es $y_1(n) = nx_1(n)$ y $y_2(n) = nx_2(n)$, y su suma ponderada resulta en $y_S(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$, que es igual a $y_S(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$. Como $y_T(n) = y_S(n)$ se puede afirmar que el sistema $y(n) = nx(n)$ es lineal.
2. Para $y(n) = x(n^2)$ las salidas $y_T(n) = a_1x_1(n^2)+a_2x_2(n^2)$ y $y_S = a_1x_1(n^2)+a_2x_2(n^2)$ son idénticas y por tanto el sistema es lineal.
3. Para $y(n) = x^2(n)$ la salida $y_T(n) = (a_1x_1(n) + a_2x_2(n))^2 = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n)$ y la salida $y_S(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$ evidentemente son diferentes y por tanto el sistema no es lineal.
4. Para $y(n) = Ax(n) + B$ la salida $y_T(n) = A(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) + B$ y la salida $y_S(n) = a_1(Ax_1(n)+B)a_2(Ax_2(n)+B) = A(a_1x_1(n)+a_2x_2(n))+B(a_1+a_2)$ difieren y por tanto el sistema, a pesar de su apariencia, no es lineal.
5. Para $y(n) = e^{x(n)}$ la salida $y_T = e^{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)} = e^{a_1x_1(n)}e^{a_2x_2(n)}$ y la salida $y_S = a_1e^{x_1(n)} + a_2e^{x_2(n)}$ son diferentes y por tanto el sistema tampoco es lineal.

5.20

5.3.3 Análisis de sistemas LTI en tiempo discreto

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento de un sistema:

1. Descomposición de la señal de entrada en señales elementales para las que se conoce su respuesta.
2. Solución de la *ecuación de diferencias*.

El análisis de sistemas, independientemente del método seleccionado, se simplifica enormemente si estos son lineales e invariantes en el tiempo (LTI: *Linear and Time Invariant*).

Descomposición en señales elementales

El concepto fundamental del análisis por descomposición es el siguiente: supóngase que la entrada $x(n)$ puede expresarse como una suma ponderada de funciones elementales $\{x_k(n)\}$

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

donde c_k son los coeficientes de ponderación o *pesos* de la descomposición de la señal $x(n)$. Si la respuesta del sistema en reposo a $x_k(n)$ es $y_k(n)$, es decir

$$y_k(n) = \mathcal{T}\left[x_k(n)\right]$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

entonces con la propiedad de linealidad se obtiene

$$y(n) = \mathcal{T}\left[x(n)\right] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] = \sum_k c_k \mathcal{T}\left[x_k(n)\right] = \sum_k c_k y_k(n)$$

En otras palabras, si el sistema es lineal, la respuesta del sistema a una entrada es igual a la suma ponderada de las repuestas del sistema a cada una de las componentes en que se puede descomponer la entrada, donde se cumple además que los coeficientes de ponderación de la salida corresponden a los coeficientes de ponderación de la entrada.

Utilizando como funciones elementales a impulsos unitarios desplazados $\delta(n-k)$ es posible expresar cualquier función de variable discreta $x(n)$ como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Nótese la semejanza con el análisis de sistemas LTI en tiempo continuo derivado en la sección 3.4.1.

Ejemplo 5.21 Descomponga la señal

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, -1, -1/2, 1\}$$

en sus impulsos.

Solución: Esta señal puede expresarse como

$$x(n) = 1 \cdot \delta(n-1) + 2 \cdot \delta(n-2) - 1 \cdot \delta(n-3) - \frac{1}{2} \cdot \delta(n-4) + 1 \cdot \delta(n-5)$$

$\boxed{5.21}$

Si $h'(n,k)$ se utiliza para denotar la respuesta de un sistema lineal a un impulso desplazado k unidades $\delta(n-k)$

$$h'(n,k) = \mathcal{T}\left[\delta(n-k)\right]$$

entonces la salida del sistema puede calcularse con las respuestas elementales a los impulsos desplazados:

$$y(n) = \sum_k c_k y_k(n) = \sum_k x(k) h'(n,k)$$

Si el sistema es además invariante en el tiempo, entonces con $h(n) = \mathcal{T}\left[\delta(n)\right]$ se tiene que $h'(n,k) = h(n-k)$ y por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

que se denomina suma de *convolución*. Se dice que la respuesta del sistema $y(n)$ a la entrada $x(n)$ es igual a la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Esto quiere decir que en un sistema LTI en reposo su respuesta a cualquier entrada puede determinarse con solo conocer dicha entrada y la respuesta al impulso $h(n)$, lo cual es similar a lo analizado en capítulos anteriores para sistemas en tiempo continuo.

El cálculo de la suma de convolución involucra cuatro pasos equivalentes a los estudiados para el caso de la integral de convolución:

1. *Reflexión* de $h(k)$ con respecto a $k = 0$ para producir $h(-k)$.
2. *Desplazamiento* de $h(-k)$ hacia el punto n que se desea calcular.
3. *Multiplicación* de $x(k)$ y $h(n-k)$ para obtener una secuencia producto $v_n(k) = x(k)h(n-k)$.
4. *Suma* de todos los valores de $v_n(k)$ para obtener $y(n)$.

Los pasos del 2 al 4 deben realizarse para todo instante n que se deseé calcular.

Ejemplo 5.22 Determine la respuesta a la señal de entrada

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

Solución: Siguiendo el procedimiento indicado, primero se calcula la reflexión de la respuesta al impulso $h(-k) = \{-1, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$. Los siguientes pasos se resumen en la tabla 5.14.

2. Desplazamiento	3. Multiplicación por $x(k) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$	4. Suma
$h(-1-k)=\{-1, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$	$v_{-1}=\{0, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 0, 0\}$	y_{-1}=1
$h(0-k)=\{-1, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$	$v_0=\{0, 0, \underset{\uparrow}{2}, 2, 0, 0\}$	y_0=4
$h(1-k)=\{-1, \underset{\uparrow}{1}, 2, 1\}$	$v_1=\{0, \underset{\uparrow}{1}, 4, 3, 0\}$	y_1=8
$h(2-k)=\{\underset{\uparrow}{-1}, 1, 2, 1\}$	$v_2=\{\underset{\uparrow}{-1}, 2, 6, 1\}$	y_2=8
$h(3-k)=\{\underset{\uparrow}{0}, -1, 1, 2, 1\}$	$v_3=\{\underset{\uparrow}{0}, -2, 3, 2\}$	y_3=3
$h(4-k)=\{\underset{\uparrow}{0}, 0, -1, 1, 2, 1\}$	$v_4=\{\underset{\uparrow}{0}, 0, -3, 1\}$	y_4=-2
$h(5-k)=\{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, -1, 1, 2, 1\}$	$v_5=\{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, -1\}$	y_5=-1

Figura 5.14: Ejemplo de convolución de dos secuencias finitas.

Con lo que resulta la señal de salida en

$$y(n) = \{1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

5.22

Con un cambio de variables es posible demostrar que la convolución es conmutativa:

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) * h(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \underset{m=n-k}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= h(n) * x(n) \end{aligned}$$

La convolución es además asociativa y distributiva

$$\begin{aligned} [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\ x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.23 Encuentre la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1\,.$$

ante una entrada $x(n) = u(n)$.

Solución: Para determinar la salida $y(n)$ del sistema con la entrada escalón unitario $u(n)$ se utiliza la sumatoria de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)h(k) \tag{5.6}$$

Para $n < 0$ el producto de $u(n-k)$ y $h(k)$ es siempre cero y por tanto $y(n) = 0$. Evaluando (5.6) para algunos valores de n se obtiene:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = 1 \\ y(1) &= h(0) + h(1) = 1 + a \\ y(2) &= h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2 \\ &\vdots \\ y(n) &= \sum_{k=0}^{n} h(k) = \sum_{k=0}^{n} a^k \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{array}{rclllllll} \sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 & +a & +a^2 & +\ldots & +a^n & \\ a\sum_{k=0}^{n} a^k & = & & a & +a^2 & +\ldots & +a^n & +a^{n+1} \\ \hline (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1-a^{n+1} & & & & & \end{array}$$

se deriva para $n \geq 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Si $|a| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ lo que implica que $y(\infty) = \frac{1}{1-a}$. La figura 5.15 muestra un ejemplo de la respuesta para $a = 0{,}9$.

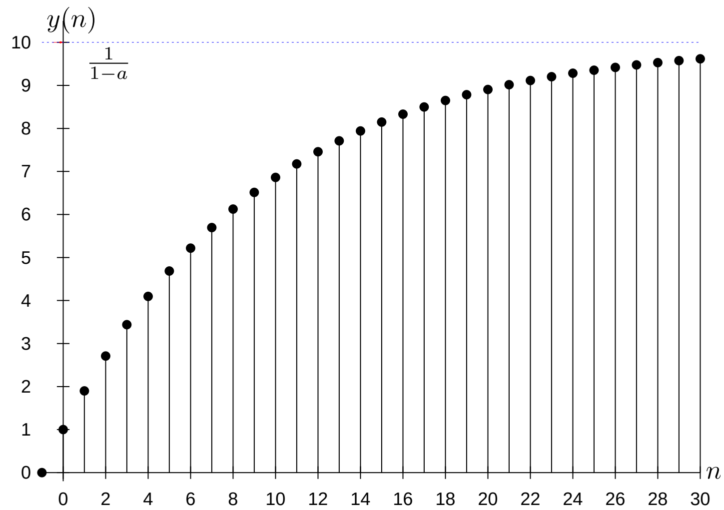


Figura 5.15: Respuesta del sistema en el ejemplo 5.23 al escalón, con $a = 0{,}9$.

$\boxed{5.23}$

La propiedad de convolución de la transformada z permite simplificar el análisis de sistemas LTI en el dominio z, donde la salida del sistema puede calcularse a través del producto de las transformadas z de la entrada y de la respuesta al impulso, de forma análoga a lo expuesto anteriormente para la transformada de Laplace y el análisis de sistemas en el tiempo continuo.

En sistemas de variable discreta también se le denomina a $H(z)$ función de transferencia del sistema, que corresponde con la transformada z de la respuesta al impulso unitario $h(n)$. Si $Y(z) = \mathscr{Z}\{y(n)\}$ y $X(z) = \mathscr{Z}\{x(n)\}$ entonces se cumple:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Si se conoce la transformada de la salida $Y(z)$ y la transformada $X(z)$ de la entrada que dio origen a dicha salida, es entonces posible encontrar la respuesta al impulso:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(n)$$

Ejemplo 5.24 Repita el ejemplo 5.23 pero utilice la transformada z para su solución.

Solución:

Debe encontrarse la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1\,.$$

ante una entrada $x(n) = u(n)$.

En secciones anteriores se demostró:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

con lo que se obtiene la salida en el dominio z:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

que se puede descomponer en fracciones parciales como

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}}\right] - \frac{a}{1-a}\left[\frac{1}{1 - az^{-1}}\right]$$

que transformado al dominio del tiempo discreto resulta en

$$y(n) = \frac{1}{1-a}u(n) - \frac{a}{1-a}a^n u(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

lo que confirma el resultado del ejemplo anterior. $\boxed{5.24}$

Sistemas LTI causales

Un sistema es *causal* si $y(n)$ depende solo de las entradas presentes y pasadas $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\}$, y salidas pasadas $\{y(n-1), y(n-2), \ldots\}$, pero no de las entradas o salidas futuras $\{x(n+1), x(n+2), \ldots; y(n+1), y(n+2), \ldots\}$. En caso contrario, el sistema es no causal.

Sistemas que funcionan "en línea" deben ser causales por la imposibilidad de determinar el valor de la entrada o la salida en el futuro.

En un sistema causal la salida en $n = n_0$ depende exclusivamente de valores de entrada $x(n)$ para $n \leq n_0$. Como en un sistema LTI

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\underbrace{x(n_0 - k)}_{\text{Muestras pasadas y actual}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\underbrace{x(n_0 - k)}_{\text{Muestras futuras}}$$

se deriva que para que la salida sea independiente de entradas futuras entonces se debe cumplir $h(k) = 0$ para todo $k \leq -1$.

Dado que $h(n)$ es la respuesta impulsional de un sistema LTI en reposo, $h(n) = 0$ para $n < 0$ es condición necesaria y suficiente para la causalidad. Así, un sistema LTI es causal si y solo si $h(n) = 0$, $\forall n < 0$, lo que también es consistente con lo mencionado para sistemas de variable continua.

Si un sistema es causal entonces la convolución puede simplificarse en

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

Generalizando, a una secuencia $x(n)$ con $x(n) \neq 0$ para algún $n < 0$ se le denomina secuencia no causal, y de lo contrario, secuencia causal.

Si tanto la entrada $x(n)$ como la respuesta impulsional son causales, entonces la convolución se simplifica en:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

Nótese que esta respuesta es a su vez causal, es decir, $y(n) = 0$ para todo $n < 0$.

En general, puesto que un sistema causal tiene como respuesta al impulso una señal $h(n)$ causal, se puede afirmar que la región de convergencia de la función de transferencia $H(z)$ es el exterior de un círculo centrado en el origen.

Estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Un sistema arbitrario en reposo se dice de entrada acotada - salida acotada (BIBO: *bounded input – bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \xrightarrow{\mathcal{T}} |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si para alguna entrada acotada se produce una salida no acotada (es infinita), el sistema se dice ser inestable.

Dada la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

se cumple para su valor absoluto

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|M_x$$

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

lo que implica que $|y(n)|$ es acotada solo si

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

En consecuencia un sistema LTI es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable. Esta condición es necesaria y suficiente.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Ejemplo 5.25 Determine el rango del parámetro a para el que el sistema LTI de respuesta al impulso $h(n) = a^n u(n)$ es estable.

Solución:

El sistema es estable si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \ldots$$

converge. Esto ocurre si y solo si $|a| < 1$ y converge a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \frac{1}{1-|a|}$$

$\boxed{5.25}$

Ejemplo 5.26 Determine el rango de valores de a y b para los cuales el sistema LTI de respuesta

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ b^n & n < 0 \end{cases}$$

es estable. La condición de estabilidad es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |b|^n + \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{b}\right|^n}_{\substack{\text{Converge} \\ \text{si } |b|>1}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n}_{\substack{\text{Converge} \\ \text{si } |a|<1}}$$

$$= \frac{|b|}{|b|-1} + \frac{1}{1-|a|}$$

El sistema es estable si $|a| < 1$ y si $|b| > 1$. $\boxed{5.26}$

En el dominio z la estabilidad se puede observar fácilmente considerando que

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

para el caso especial $|z| = 1$, que es el círculo unitario en el plano z, y considerando que si un sistema es estable su respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces lo anterior se reduce a

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad |z| = 1$$

lo que implica un sistema descrito por $H(z)$ es estable si su región de convergencia incluye al círculo unitario.

De lo anterior se deriva que si un sistema es estable y causal, entonces los polos de su función de transferencia deben estar dentro del círculo unitario.

Sistemas en tiempo discreto y ecuaciones de diferencias

El cálculo de la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

sólo es aplicable en sistemas LTI que tienen una respuesta al impulso de longitud finita (llamados también sistemas FIR por *Finite Impulse Response*), puesto que de otro modo se requeriría de una memoria infinita para almacenar $h(n)$, y un número infinito de multiplicaciones y adiciones.

Las llamadas *ecuaciones de diferencias* permiten trabajar con sistemas con una respuesta al impulso de longitud infinita (o sistemas IIR por *Infinite Impulse Response*), y son el equivalente en el dominio discreto de las ecuaciones diferenciales.

Un sistema causal es *recursivo* si su salida en el instante n depende no solo de los valores presentes y pasados a la entrada, sino también de valores anteriores de la salida, $y(n-1), y(n-2), \ldots$:

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

donde $F[\cdot]$ denota una función cualquiera con argumentos iguales a las entradas y salidas presentes y pasadas.

El sistema se denomina *no recursivo* si depende únicamente de las entradas presentes y pasadas:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

Nótese que los sistemas LTI causales con una respuesta finita al impulso de longitud M son no recursivos, puesto que pueden expresarse de la forma

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

que depende de la entrada actual $x(n)$ y las $M-1$ entradas anteriores.

En general, los sistemas recursivos tienen respuestas al impulso infinitas, pero que pueden calcularse en un número finito de pasos considerando las salidas anteriores. Esto tiene la inconveniencia de que la salida de un sistema recursivo debe calcularse en orden estrictamente secuencial, por requirse los cálculos de dichas salidas anteriores. En un sistema no recursivo las salidas anteriores no son consideradas y se puede calcular un valor para cualquier n directamente.

Ejemplo 5.27 El sistema de media acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

es recursivo pues

$$\begin{aligned}
(n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^{n} x(k) \\
\Rightarrow ny(n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \\
\Rightarrow (n+1)y(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n) \\
y(n) &= \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(ny(n-1) + x(n) \right) \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

5.27

Los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos. Considérese por ejemplo el sistema

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

que a pesar de su similitud con (5.7), difiere por la naturaleza de los coeficientes, lo que tiene implicaciones sobre la invarianza en el tiempo. En este último caso, el coeficiente a es constante y el sistema es invariante en el tiempo. Para la media acumulativa, los coeficientes $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{1}{n+1}$ son dependiente del tiempo y el sistema es variante en el tiempo.

Evalúese ahora la respuesta de este sistema ante una entrada $x(n)$ causal y con una condición inicial $y(-1)$:

$$\begin{aligned}
y(0) &= ay(-1) + x(0) \\
y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2 y(-1) + ax(0) + x(1) \\
y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3 y(-1) + a^2 x(0) + ax(1) + x(2) \\
&\vdots \\
y(n) &= a^{n+1} y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1} x(1) + \ldots + a^0 x(n) \\
&= \underbrace{a^{n+1} y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \qquad n \geq 0
\end{aligned}$$

El término $y_{zi}(n)$ depende de las condiciones iniciales y se obtendría si la entrada fuese cero (*zero input*), como resultado del estado inicial del sistema y de sus características propias. A $y_{zi}(n)$ se le denomina respuesta natural o libre del sistema, o también, respuesta a entrada nula.

El término $y_{zs}(n)$ se obtiene cuando el estado del sistema es cero (*zero state*), es decir, con una entrada $x(n)$ cuando el sistema está en reposo, y se le denomina respuesta en estado nulo o respuesta forzada. Nótese que en el ejemplo, $y_{zs}(n)$ puede interpretarse como la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso:

$$h(n) = a^n u(n)$$

donde los índices son finitos debido a la causalidad de ambas señales $x(n)$ y $h(n)$. Este ejemplo corresponde a una ecuación de diferencias de primer orden, y es un caso particular de la ecuación de diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

o con $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{5.8}$$

donde el entero N recibe el nombre de orden de la ecuación de diferencias u orden del sistema.

Las condiciones iniciales $y(-1), \ldots, y(-N)$ resumen toda la historia pasada del sistema, y son necesarias para efectuar el cálculo de las salidas presentes y futuras.

La respuesta al impulso $h(n)$ en sistemas recursivos se define como la respuesta del sistema cuando la entrada $x(n)$ es igual al impulso $\delta(n)$, y el sistema está inicialmente en reposo. Cualquier sistema recursivo descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes es un sistema de respuesta infinita al impulso, pero no todo sistema de respuesta infinita LTI puede ser descrito con estas ecuaciones.

En el dominio z la ecuación (5.8) se transforma, utilizando la propiedad de desplazamiento, en

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} &= \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} \\
Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} &= X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \\
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}
\end{aligned}$$

lo que quiere decir que cualquier sistema en tiempo discreto descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes tiene una función de transferencia racional. Puesto que la descomposición en fracciones parciales de $H(z)$ contendrá una suma de términos con un único polo de orden n, los cuales corresponden en el dominio n con una secuencia de longitud infinita, se deriva que todo sistema descrito por una ecuación de diferencias con coeficientes constantes tiene una respuesta al impulso $h(n)$ de longitud infinita.

©2005-2008 — P. Alvarado   Uso exclusivo ITCR

Ejemplo 5.28 Encuentre la ecuación de diferencias correspondiente a un sistema causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

Solución: Se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

esto es equivalente a

$$Y(z)\left[1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$y(n) + \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

con lo que finalmente se obtiene

$$y(n) = -\frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

$\boxed{5.28}$

5.4 Transformada z unilateral

Al igual que en el caso de sistemas en tiempo continuo, la mayoría de aplicaciones en ingeniería involucra sistemas y señales causales, por lo que tiene sentido definir la transformada z unilateral.

5.4.1 Definición y propiedades

La transformada z unilateral se define como:

$$\mathscr{Z}_u\left\{x(n)\right\} = X(z) \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

y la relación se denota como $x(n) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$.

La transformada z unilateral y la bilateral se diferencian en el límite inferior de la sumatoria, y presenta por lo tanto las siguientes características:

1. No contiene información sobre la señal $x(n)$ para los valores negativos de n.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

2. Es única sólo para señales causales, puesto que éstas son las únicas señales que son cero para $n < 0$.
3. $\mathscr{Z}_u\{x(n)\} = \mathscr{Z}\{x(n)u(n)\}$. Puesto que $x(n)u(n)$ es causal, la ROC de su transformada $X(z)$ es siempre exterior a un círculo. Por lo tanto, cuando se trate con transformadas z unilaterales, no es necesario referirse a su región de convergencia.

Ejemplo 5.29 Determine la transformada z unilateral de:

1. $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$.
2. $x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$.
3. $x_3(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$.
4. $x_4(n) = \delta(n)$.
5. $x_5(n) = \delta(n-k), k > 0$.
6. $x_6(n) = \delta(n+k), k > 0$.

1. $1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$.
2. $5 + 7z^{-1} + z^{-3}$.
3. $5 + 7z^{-1} + z^{-3}$.
4. 1.
5. z^{-k}.
6. 0.

$\boxed{5.29}$

Nótese que la transformada z unilateral no es única para señales con componentes anticausales diferentes (por ejemplo $X_2(z) = X_3(z)$, aun cuando $x_2(n) \neq x_3(n)$). Para señales anticausales, $X(z)$ siempre será cero.

Las propiedades de esta transformada son similares a las de la transformada z bilateral, pero el desplazamiento merece especial atención.

Retardo temporal

Si $x(n) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} X(z)$, entonces

$$x(n-k) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} z^{-k}\left[X(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}\right]$$

para $k > 0$. Si $x(n)$ es causal entonces $x(n-k) = z^{-k}X(z)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\{x(n-k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-(m+k)} = \sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-m}z^{-k} \\ &= z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-k}\left\{\sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}\right\}\end{aligned}$$

$$= z^{-k}\left\{X(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}\right\}$$

Nótese que si se desplaza $x(n)$ hacia la derecha entonces aparecen k nuevas muestras que deben considerarse.

Adelanto temporal

Si $x(n) \circ\!\!\overset{z_u}{\longrightarrow}\!\!\bullet\, X(z)$, entonces

$$x(n+k) \circ\!\!\overset{z_u}{\longrightarrow}\!\!\bullet\, z^{k}\left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}\right]$$

para $k > 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\left\{x(n+k)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} x(m)z^{-(m-k)} = z^{k}\left[\sum_{m=k}^{\infty} x(m)z^{-m}\right] \\ &= z^{k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m}\right] = z^{k}\left[X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m}\right]\end{aligned}$$

Nótese que si la señal se desplaza a la izquierda, entonces k muestras de la transformada $X(z)$ deben desaparecer.

Ejemplo 5.30 Calcule la transformada z unilateral de:

1. $x(n) = a^{n}$.
2. $x_2(n) = x(n-2)$.
3. $x_3(n) = x(n+2)$.

Solución:

1. Se cumple

$$\mathscr{Z}_u\left\{x(n)\right\} = \mathscr{Z}\left\{x(n)u(n)\right\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad .$$

2.

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\left\{x(n-2)\right\} &= z^{-2}\left[X(z) + \sum_{n=1}^{2} x(-n)z^{n}\right] \\ &= z^{-2}\left[X(z) + x(-1)z + x(-2)z^{2}\right] \\ &= \frac{z^{-2}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}\end{aligned}$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

3.

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\left\{x(n+2)\right\} &= z^2\left[X(z)-\sum_{n=0}^{1}x(n)z^{-n}\right]\\ &= z^2\left[\frac{1}{1-az^{-1}}-1-az^{-1}\right]\\ &= \frac{z^2}{1-az^{-1}}-z^2-az\end{aligned}$$

$\boxed{5.30}$

La propiedad de desplazamiento de la transformada z unilateral se utiliza en la solución de ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes y condiciones iniciales no nulas.

Teorema del valor final

Se tiene que:

$$X(z)=\mathscr{Z}_u\left\{x(n)\right\}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x(n)z^{-n}$$

y además:

$$\mathscr{Z}_u\left\{x(n+1)\right\}=zX(z)-zx(0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x(n+1)z^{-n}$$

con lo que se tiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\left\{x(n+1)\right\}-\mathscr{Z}_u\left\{x(n)\right\} &= (zX(z)-zx(0))-X(z)\\ &= (z-1)X(z)-zx(0)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}x(n+1)z^{-n}-\sum_{n=0}^{N}x(n)z^{-n}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}x(n+1)z^{-n}-\sum_{n=-1}^{N-1}x(n+1)z^{-n-1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)z^{-n}+x(N+1)z^{-N}-x(0)-\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)z^{-n-1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)(z^{-n}-z^{-n-1})+x(N+1)z^{-N}\right)-x(0)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)z^{-n-1}(z-1)+x(N+1)z^{-N}\right)-x(0)\end{aligned}$$

con lo que se deduce:

$$(z-1)X(z)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)z^{-n-1}(z-1)+x(N+1)z^{-N}\right)+(z-1)x(0)$$

y aplicando el límite cuando z tiende a 1 a ambos lados se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

lo que se conoce como *teorema del valor final*. En la demostración se ha asumido que la ROC de $(z-1)X(z)$ incluye a $|z|=1$.

Este teorema se utiliza para calcular el valor asintótico de la señal $x(n)$ cuando n tiende a infinito, si se conoce $X(z)$ pero no $x(n)$.

Ejemplo 5.31 Determine la respuesta del sistema con respuesta impulsional $h(n) = a^n u(n)$, $|a|<1$, ante un escalón unitario, cuando $n\to\infty$.

Solución: La salida del sistema ante la entrada dada se calcula en el dominio z como:

$$y(n) = h(n) * x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}, \text{ROC} : |z| > 1$$

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\underbrace{\frac{z^2}{(z-a)(z-1)}}_{\text{ROC: } |z|>a<1} = \frac{1}{1-a}$$

Este resultado es consistente con lo mostrado en la figura 5.15.

$\boxed{5.31}$

5.4.2 Respuestas natural y forzada

Las propiedades de desplazamiento en el tiempo de la transformada z unilateral permiten evaluar el comportamiento de un sistema cuando las condiciones iniciales no son nulas. En general, si se asume que el sistema está en reposo, es decir, si se asume que todas las condiciones iniciales del sistema son nulas, entonces la respuesta $y(n)$ del sistema ante la entrada causal $x(n)$ se conoce como *respuesta forzada* del sistema. Si por otro lado la entrada $x(n)$ es nula, pero el sistema tiene condiciones iniciales no nulas, entonces a la reacción del sistema a partir de la muestra cero $y(n)$ se le conoce como *respuesta natural* del sistema. La respuesta total del sistema es entonces aquella conformada por las respuestas natural y forzada. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.

Ejemplo 5.32 Un sistema LTI en tiempo discreto está descrito por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = \frac{4}{5}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) - x(n-2)$$

Encuentre la respuesta natural del sistema ante las condiciones iniciales $y(-1)=0$ y $y(-2)=-4$, y la respuesta forzada del sistema ante un escalón unitario.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Solución:

Aplicando la transformada z unilateral, sus propiedades de retraso en el tiempo, y considerando que la entrada $x(n)$ es causal, se cumple:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{4}{5}\left[Y(z)z^{-1} + y(-1)\right] \\
&\quad - \frac{1}{4}\left[Y(z)z^{-2} + y(-1)z^{-1} + y(-2)\right] \\
&\quad + X(z) - X(z)z^{-2} - x(-1)z^{-1} + x(-2) \\
Y(z)\left[1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right] &= X(z)\left[1 - z^{-2}\right] + \frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1) \\
Y(z) &= \underbrace{\frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}X(z)}_{\text{Respuesta forzada}} + \underbrace{\frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}}_{\text{Respuesta natural}}
\end{aligned}$$

Obsérvese que ambas componentes, la natural y la forzada, comparten los mismos polos, y determinan así la forma de las señales en cuanto a atenuación/amplificación exponenciales y la frecuencia de las componentes oscilatorias. Los ceros serán responsables de la fase y amplitud de las señales resultantes.

La respuesta natural del sistema se obtiene haciendo $X(z) = 0$:

$$Y(z) = \frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

y con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n \arctan\frac{3}{4}\right)u(n) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(n \arctan\frac{3}{4}\right)u(n)$$

La respuesta forzada ante un escalón unitario estará dada por la transformada z inversa de

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

El cero en 1 se cancela con el polo en el mismo sitio. El lector puede demostrar por descomposición en fracciones parciales que: expresión se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{7}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{7}{3}}{1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}}
\end{aligned}$$

que corresponde a la señal

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n \arctan\frac{3}{4}\right) u(n) + \frac{14}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(n \arctan\frac{3}{4}\right) u(n)$$

5.32

5.5 Interconexión de sistemas

Los siguientes conceptos se aplican tanto a sistemas discretos como continuos. Puesto que en los dominios de la frecuencia $j\omega$, s y z la convolución del tiempo se transforma en un producto algebraico, además de que las transformaciones son lineales, esto permite generalizar los conceptos a los tres dominios por igual. Se tratará aquí el caso especial de los sistemas discretos, pero los principios son válidos si se sustituye la variable discreta n por la variable continua t, y si se reemplaza el dominio z y la transformada z, por el dominio s y la transformada de Laplace.

Hay dos maneras fundamentales de interconectar sistemas: interconexión en cascada (serie) e interconexión paralela (figura 5.16). La interconexión en cascada se describe con sistemas de la forma:

$$y(n) = \mathcal{T}_2[\mathcal{T}_1[x(n)]] = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

En general, para la conexión en cascada el orden de los bloques no es relevante. Si los sistemas son lineales e invariantes en el tiempo entonces $\mathcal{T}_c$ es invariante en el tiempo, y $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

La interconexión en paralelo se describe por

$$y(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] = \mathcal{T}_p[x(n)]\,.$$

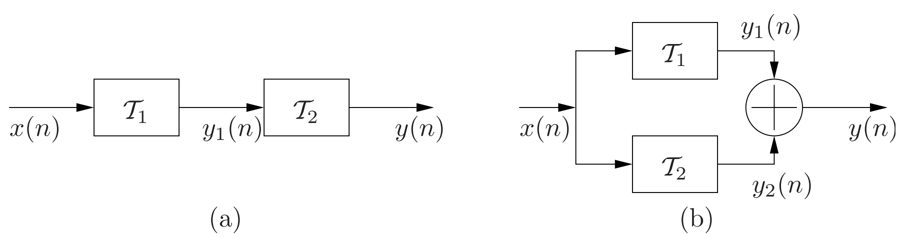


Figura 5.16: Interconexión de sistemas discretos. (a) Cascada. (b) Paralelo

Nótese que si el sistema es LTI, entonces se cumple $y_1(n) = x(n) * h_1(n)$ y por tanto en el dominio z esta relación se puede representar por $Y_1(z) = X(z)H_1(z)$. Puesto que también se cumple $Y(z) = H_2(z)Y_1(z)$ se concluye que

$$Y(z) = [H_1(z)H_2(z)]X(z)$$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

o en otras palabras la función de transferencia de la cascada de sistemas es igual al producto de las mismas. Para la conexión en paralelo se puede hacer uso de la linealidad y así obtener

$$Y(z) = [H_1(z) + H_2(z)]X(z)$$

5.5.1 Diagramas de bloques

Sumador

El *sumador* es un bloque que realiza la adición entre dos señales, sumando las muestras en un instante dado y se representa como lo indica la figura 5.17.

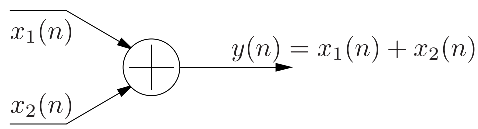


Figura 5.17: Diagrama de un sumador.

Multiplicador por constante

El *multiplicador* por constante es un bloque que escala la amplitud y cambia la fase de una señal, y se representa como lo indica la figura 5.18.

Figura 5.18: Diagrama de un multiplicador por constante.

Multiplicador de señal

El *multiplicador* de señal es un bloque que multiplica en cada instante de tiempo sus diversas entradas. Éste es representado como lo indica la figura 5.19.

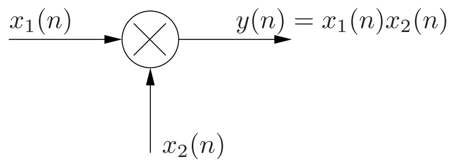


Figura 5.19: Diagrama de un multiplicador de señales.

Retardador de un elemento

El *retardador* es un bloque que retrasa la señal de entrada en una unidad de tiempo. Este es utilizado principalmente en el análisis y modelado de sistemas discretos. Se representa como lo indica la figura 5.20.

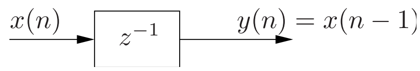


Figura 5.20: Diagrama de elemento retardador.

Adelantador de un elemento

El *adelantador* es un elemento que adelanta una señal una unidad de tiempo en el futuro. No es realizable físicamente y solo existe en sistemas discretos que operan "fuera de línea". Se representa como lo indica la figura 5.21.

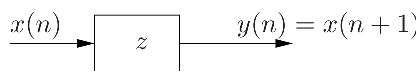


Figura 5.21: Diagrama de elemento adelantador.

Ejemplo 5.33 Realice el diagrama de bloques para

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Nótese primero que esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}\left(x(n) + x(n-1)\right)$$

con lo que se deriva fácilmente el diagrama mostrado en la figura 5.22.

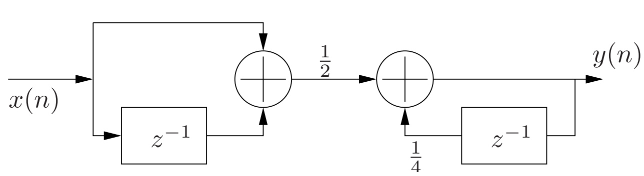


Figura 5.22: Diagrama de bloques de la ecuación 5.22.

5.33

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

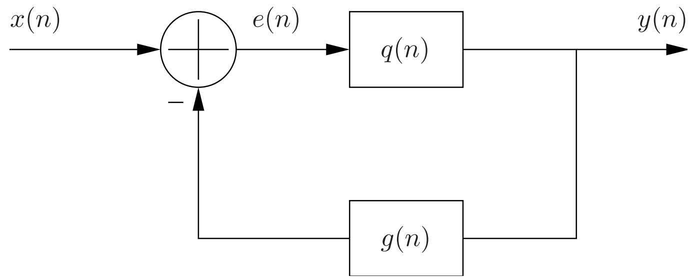


Figura 5.23: Sistema retroalimentado

Ejemplo 5.34 Encuentre la función de transferencia del sistema mostrado en la figura 5.23.

Solución: Las funciones en los bloques denotan sus respuestas al impulso. Así se tiene que los bloque y señales tienen las siguientes transformadas:

$$\begin{aligned}
x(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z)\\
y(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(z)\\
q(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, Q(z)\\
g(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, G(z)\\
e(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\, E(z)
\end{aligned}$$

La señal $e(n)$ se obtiene con la substracción de la entrada $x(n)$ y la salida del bloque con función de transferencia $G(z)$, y se cumple entonces en el dominio z que $E(z) = X(z) - Y(z)G(z)$.

Aplicando las propiedades de linealidad y de convolución se tiene que

$$\begin{aligned}
E(z)Q(z) &= Y(z)\\
[X(z) - G(z)Y(z)]Q(z) &= Y(z)\\
X(z)Q(z) &= Y(z)[1 + G(z)Q(z)]\\
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{Q(z)}{1 + G(z)Q(z)}
\end{aligned}$$

Esta estructura será utilizada ampliamente en control automático. Nótese que si $X(z)$, y $Q(z)$, $G(z)$ son funciones racionales, entonces $H(z)$ también lo será.

$\boxed{5.34}$

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

5.6 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [16, 14], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

Problema 5.1. Considere la representación de la función de variable discreta $x(n)$ en términos continuos

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$$

donde $x(n)$ se obtiene muestreando periódicamente a la señal analógica $x_a(t)$.

Si $x_a(t)$ tiene una respuesta en frecuencia $X_a(j\omega)$, encuentre el espectro correspondiente de $x(n)$. ¿Qué relación debe existir entre el periodo de muestreo T y el espectro $X_a(j\omega)$ para que la señal original $x_a(t)$ sea reconstruíble?

Problema 5.2. Dada la secuencia $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1, \frac{1}{2}\}$, grafique las secuencias:

1. $2x(n)$
2. $x(-n)$
3. $x(-2-n)$
4. $x(2-n)$
5. $x(-2+n)$
6. $x(2+n)$

Problema 5.3. Si $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 4\}$, exprese las siguientes secuencias en términos de $x(n)$

1. $\{1, 2, 3, 4, 0, \underset{\uparrow}{0}\}$
2. $\{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$
3. $\{4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\}$
4. $\{4, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}\}$

Problema 5.4. Represente las siguientes secuencias en términos de rampas $u_r(n)$ y escalones unitarios $u(n)$.

1. $x_1(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0\}$
2. $x_2(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0\}$
3. $x_3(n) = \{0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$
4. $x_4(n) = \{4, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$
5. $x_5(n) = \{-4, -3, -2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\}$

Problema 5.5. Grafique las siguientes funciones e indique cualitativamente qué regiones de convergencia (ROC) tiene su transformada z:

1. $x(n) = \operatorname{sen}(\omega n)u(n)$
2. $x(n) = u(n+4) - u(n-2)$
3. $x(n) = u(-n-2)$
4. $x(n) = u_r(n) - 2u_r(n-5) + u_r(n-10)$
5. $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-|n|}$
6. $x(n) = u_r(n+5)u(-n-5)$

Problema 5.6. Encuentre las regiones del plano z donde las siguientes series convergen:

1. $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} z^{-n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] z^{-n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+2} z^{n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{n}$

Problema 5.7. Encuentre la transformada z de

$$x(n) = \frac{u(n-2)}{4^n}$$

con su correspondiente ROC.

Problema 5.8. Sea

$$x(n) = (-1)^n u(n) + \alpha^n u(-n-n_0)$$

Encuentre para qué valores de α y n_0 es la ROC de la transformada z de $x(n)$

$$1 < |z| < 2$$

Problema 5.9. Encuentre la transformada z de

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

Indique los polos, ceros y ROC.

Problema 5.10. Para las siguientes expresiones identifique los ceros y polos finitos e infinitos.

1. $\dfrac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$
2. $\dfrac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)}$
3. $\dfrac{z^{-2}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

Problema 5.11. Si $x(n)$ es absolutamente sumable y tiene transformada z racional, con un polo en $1/2$, entonces ¿podría $x(n)$ ser

1. una señal finita?
2. una señal izquierda?
3. una señal derecha?
4. una señal bilateral?

Problema 5.12. Sea

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

Indique cuántas y cuáles regiones de convergencia son posibles para $X(z)$.

Problema 5.13. Encuentre para todas las señales discretas $x(n)$ mostradas en la tabla 5.1 la transformada z correspondiente utilizando la definición.

Problema 5.14. Sea $x(n)$ una señal con transformada z racional $X(z)$, que tiene un polo en $z = 1/2$. Se sabe además que

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n x(n)$$

es absolutamente sumable, pero

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n x(n)$$

no es absolutamente sumable. Con esta información indique si $x(n)$ es izquierda, derecha, bilateral o finita.

Problema 5.15. Encuentre las funciones en tiempo discreto equivalentes a las transformadas z indicadas en la tabla 5.1 utilizando la definición integral de la transformada z inversa.

Problema 5.16. Utilizando la definición de la transformada z inversa, encuentre la secuencia en el tiempo discreto equivalente a

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

Problema 5.17. Encuentre la transformada z inversa de:

1. $X(z) = \cos(z)$
2. $X(z) = \operatorname{sen}(z)$

sabiendo que en ambos casos el círculo unitario del plano z se encuentra en la ROC.

Problema 5.18. Encuentre por división polinomial la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

para ROC: $|z| > 1/3$ y para ROC: $|z| < 1/3$.

Problema 5.19. Encuentre la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

para todas las posibles regiones de convergencia por medio de descomposición en fracciones parciales.

©2005-2008 — P. Alvarado Uso exclusivo ITCR

Problema 5.20. Encuentre la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{256}\left[\frac{256 - z^{-8}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right], \quad \text{ROC: } |z| > 0$$

Problema 5.21. Para la ventana rectangular

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

sea

$$g(n) = x(n) - x(n-1)$$

1. Encuentre una expresión para $g(n)$ y su transformada z.
2. Encuentre la transformada z de $x(n)$ considerando que

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} g(k)$$

Problema 5.22. Demuestre que dos términos polinomiales simples complejos conjugados, y una ROC externa a los dos polos, dan origen a las señales:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - {p_1}^* z^{-1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\, & 2\,|A|\,|p_1|^n \cos(n\angle p_1 + \angle A)u(n) \\ &= 2|p_1|^n \operatorname{Re}\{A\} \cos(n\angle p_1) - 2|p_1|^n \operatorname{Im}\{A\} \operatorname{sen}(n\angle p_1) \end{aligned}$$

Problema 5.23. Dada la señal triangular

$$g(n) = u_r(n) - 2u_r(n-a) + u_r(n-2a)$$

si $x(n)$ es una ventana rectangular

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

encuentre los valores de k y n_0 en términos de a necesarios para que se cumpla

$$g(n) = x(n) * x(n - n_0)$$

Encuentre la transformada z de $g(n)$ directamente de su definición, y utilizando la propiedad de convolución.

Problema 5.24. Para las siguientes funciones de transferencia de sistemas discretos, si se sabe que estos son estables indique si además son causales:

1. $\dfrac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$
2. $\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$
3. $\dfrac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$

Problema 5.25. Un sistema LTI tiene función de transferencia $H(z)$ y respuesta al impulso $h(n)$. Se sabe

1. $h(n)$ es real
2. $h(n)$ es derecha
3. $\lim_{z\to\infty} H(z) = 1$
4. $H(z)$ tiene dos ceros
5. $H(z)$ tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo $|z| = 3/4$

¿Es el sistema causal? ¿Es estable?

Problema 5.26. Encuentre la transformada z unilateral de las siguientes señales.

1. $x_1(n) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n u(n+5)$
2. $x_2(n) = \delta(n+3) + \delta(n) + 2^n u(-n)$
3. $x_3(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|n|}$

Problema 5.27. Un sistema de entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ se rige por la ecuación de diferencias:

$$y(n-1) + 2y(n) = x(n)$$

1. Determine la respuesta de entrada cero al sistema si su condición inicial es $y(-1) = 2$.
2. Encuentra la respuesta de estado cero si su entrada es $x(n) = (1/4)^n u(n)$.
3. Determine la salida del sistema para $n \geq 0$ si $y(-1) = 2$ y $x(n) = (1/4)^n u(n)$